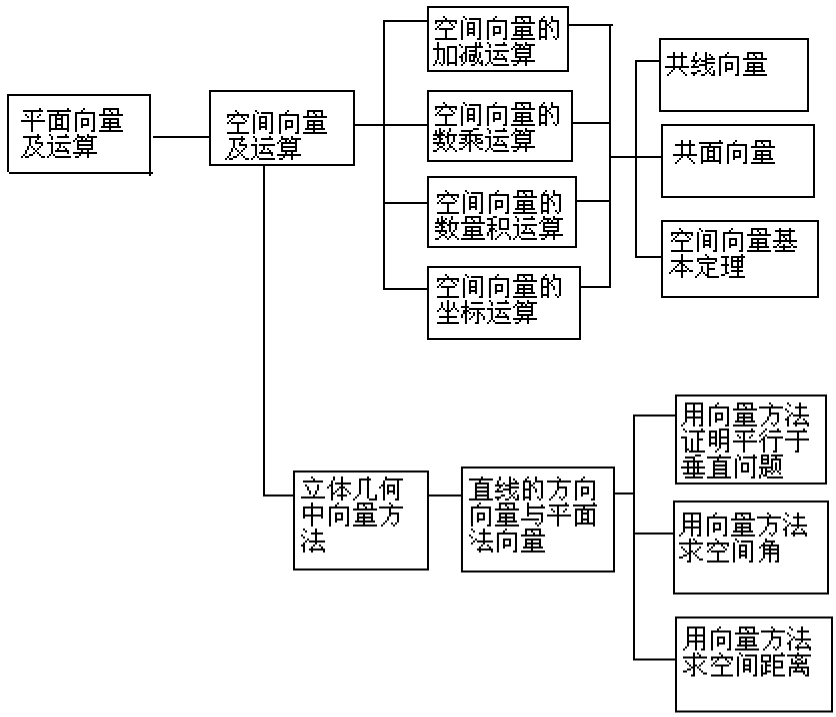
空间向量和立体几何

黄建春

（渝石网络 http://www.fishsting.com 中国重庆）

知识清单：



1，**空间向量及运算：**

空间向量和平面向量的加、减、数乘一样。

1.1 空间向量的定义：空间中既有大小又有方向的向量叫做空间向量，用有向线段表示空间向量的定义 $\overline{AB}$ 或 $\vec{a}$，是自由向量，不讲究起点，空间向量的大小叫做空间向量的长度或者模。记 $\left|\overline{AB}\right|$ 或者 $|\vec{a}|$。

1.2 空间向量的夹角：过空间一点 O 作 $\overline{OA}=\vec{a}$，$\overline{OB}=\vec{b}$，则 $\angle AOB$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记作 $\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle$，$0\le\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle\le\pi$，当 $\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，记 $\vec{a}\perp\vec{b}$。当 $\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle=0$ 或 π 时，$\vec{a}\,//\,\vec{b}$。

1.3 特殊空间向量：当 $|\vec{a}|=0$ 时，称 $\vec{a}$ 为零向量，记 $\vec{a}=0$，与任意向量平行和

垂直。当$|\vec{a}|=1$，称$\vec{a}$为单位向量，对任意非零向量$\vec{a}$，$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$叫做$\vec{a}$的单位向量。当$\vec{a}=-\vec{b}$时，称$\vec{a}$与$\vec{b}$互为相反向量。

1.4 **方向向量与法向量**：当$\vec{a}$与l平行时，称$\vec{a}\ (\neq 0)$是l的方向向量，一直线的方向向量有无数个。当$\vec{a}$与平面α垂直时，称$\vec{a}\ (\neq 0)$是平面α的法向量，一平面的法向量有无数个。

1.5 向量的线性运算：

1.5.1 向量的加法符合平行四边形法则，减法符合三角形法则，又满足规律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$，若 n 个向量相加且首尾相接，则其和向量以开始起点为起点，以最终的终点为终点一样，即

$\overline{A_0A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}=\overline{A_0A_n}$。

1.5.2 向量的数乘：$\lambda\vec{a}$与平面向量意义相同。$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$，$\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向；$\lambda<0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向；满足$\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$；$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$；$(\mu+\lambda)\vec{a}=\mu\vec{a}+\lambda\vec{a}$；$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$

1.5.3 向量的共线定理：$\vec{b}\neq 0$时，$\vec{a}\,//\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}$

1.6 空间向量的数量积：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ 是一个实数。

满足规律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$$

不满足结合律，即：$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\neq\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$

应用：$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\cos\langle\vec{a}\cdot\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}(\vec{a}\neq 0,\vec{b}\neq 0)$$

2，空间向量基本定理及坐标运算：

2.1 空间向量基本定理：若向量$\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$是空间三个不共面向量，$\vec{a}$是空间任意向量，那么存在唯一一组实数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$使得$\vec{a}=\lambda_1\overline{e_1}+\lambda_2\overline{e_2}+\lambda_3\overline{e_3}$，其中空间中不共面的向量$\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$叫做这空间的一组基底。

2.2 单位正交基：当一组基底$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$两两垂直，且$\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=\left|\vec{k}\right|=1$，则$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 叫做单位正交基底，对于任一向量$\vec{a}$，有$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，其中$x=\vec{a}\cdot\vec{i}$，$y=\vec{a}\cdot\vec{j}$，$z=\vec{a}\cdot\vec{k}$叫做$\vec{a}$在$x,y,z$轴上的投影。

2.3 空间向量坐标运算： $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1x_2,y_1y_2,z_1z_2)$$

2.4 向量坐标的应用： $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$

若$\vec{b}\neq 0$，则$\vec{a}//\vec{b}=\begin{cases}x_1=\lambda x_2\\ y_1=\lambda y_2 \quad\quad \lambda\in R\\ z_1=\lambda z_2\end{cases}$

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$$

$$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}\cdot\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2}}\ (\vec{a}\neq 0,\vec{b}\neq 0)$$

2.5 待定系数法求平面法向量步骤：

（1）设平面法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

（2）找出平面内两不共线向量坐标 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$

（3）法向量$\vec{n}$与$\vec{a},\vec{b}$都垂直$\Rightarrow\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{a}=0\\\vec{n}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$

（4）解方程组，取其中一个解，就为法向量的坐标。

3，用向量解决平行和垂直问题：直线l_1的方向向量设为$\overline{s_1}$，直线l_2的方向向量设为$\overline{s_2}$，平面α的法向量设为$\overline{n_1}$，平面β的法向量设为$\overline{n_2}$，则：

$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \overline{s_1} // \overline{s_2}$，$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{s_1} \perp \overline{s_2}$，$l_1 // \alpha \Leftrightarrow \overline{s_1} \perp \overline{n_1}$

$l_1 \perp \alpha \Leftrightarrow \overline{s_1} // \overline{n_1}$，$\alpha // \beta \Leftrightarrow \overline{n_1} // \overline{n_2}$，$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2}$

4，用向量求夹角：

4.1 直线间夹角： 当l_1，l_2共面时，把两直线夹角中范围在$[0,\frac{\pi}{2}]$内的角叫做l_1，l_2间的夹角。当l_1，l_2互为异面直线时，在l_1上任取一点 A 作$AB // l_2$，把l_1和 AB 间的夹角叫做异面直线l_1和l_2的夹角。

向量与夹角间的关系：已知直线l_1和l_2的方向向量为$\overline{s_1}$，$\overline{s_2}$ 当$0 \le \langle\overline{s_1},\overline{s_2}\rangle \le \frac{\pi}{2}$时，直线$l_1$和$l_2$的夹角等于$\langle\overline{s_1},\overline{s_2}\rangle$；当$\frac{\pi}{2} < \langle\overline{s_1},\overline{s_2}\rangle \le \pi$时，直线$l_1$和$l_2$的夹角等于$\pi-\langle\overline{s_1},\overline{s_2}\rangle$。

4.2 平面间夹角：两平面所成的二面角中，范围在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内叫做两平面间的夹角。

向量与夹角的关系：平面π_1与π_2法向量为$\overline{n_1}$和$\overline{n_2}$，θ为两平面所称二面角的平面角由$\langle\overline{n_1},\overline{n_2}\rangle$确定：当$0 \le \langle\overline{n_1},\overline{n_2}\rangle \le \frac{\pi}{2}$时，$\theta=\langle\overline{n_1},\overline{n_2}\rangle$； 当$\frac{\pi}{2} < \langle\overline{n_1},\overline{n_2}\rangle \le \pi$时，$\theta=\pi-\langle\overline{n_1},\overline{n_2}\rangle$

4.3 直线与平面的夹角：平面外一条直线与它在平面内投影的夹角叫做直线与平面的夹角，范围在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$。设直线$l$方向向量为$\vec{a}$，平面法向量为$\vec{n}$，直线与平面所成的角为$\theta$，则：

$$\left|\sin\theta\right| = \left|\cos\left\langle\vec{a},\vec{n}\right\rangle\right| = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$$

当$\left\langle\vec{a},\vec{n}\right\rangle > \frac{\pi}{2}$时，$\theta = \left\langle\vec{a},\vec{n}\right\rangle - \frac{\pi}{2}$，$\sin\theta = -\cos\left\langle\vec{a},\vec{n}\right\rangle$

当$\left\langle\vec{a},\vec{n}\right\rangle < \frac{\pi}{2}$时，$\theta = \frac{\pi}{2} - \left\langle\vec{a},\vec{n}\right\rangle$

5，用向量求距离：一个图形中任一点与另一个图形中任一点间距离的最小值叫做图形与图形之间的距离。

5.1 点到直线距离：因为直线和直线外一点确定一个平面，所以空间一点到直线距离实际上就是空间中某一平面内点到直线的距离。l是过点p平行于向量$\vec{s}$的直线，A是直线l外一定点，点A到l的距离为$d = \sqrt{\left|\overline{PA}\right|^2 - \left|\overline{PA}\cdot\overline{s_0}\right|^2}$（$\overline{s_0}$为向量$\vec{s}$方向上的单位向量）

5.2 点到平面的距离：π是过点p的垂直向量$\vec{n}$的平面，A是π外一定点，点A到平面π的距离$d = \left|\overline{PA}\cdot\overline{n_0}\right|$（$\overline{n_0}$为向量$\vec{n}$方向上的单位向量）。

5.3 线面距离和面面距离：

5.3.1 直线到它平行平面间的距离：一直线与一平面平行，这直线上任一点到面间的距离称为线面距离，一般将线面距离转化为点面距或面面距来求。

5.3.2 两个平行平面间的距离：和两个平行平面同时垂直的直线叫做这两平面的公垂线，公垂线夹在两平面之间的部分叫做这两个平面的公垂线段，公垂线段的长度称为面面距，一般将面面距转化为点面距来求。

基础题：

1，在空间四边形ABCD中，若$\overline{AB} = \vec{a}$，$\overline{BD} = \vec{b}$，$\overline{AC} = \vec{c}$，则$\overline{CD}$等于（　　）

A．$\vec{a} - (\vec{b} - \vec{c})$　　B．$\vec{c} - (\vec{b} - \vec{a})$　　C．$\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$　　D．$\vec{b} - (\vec{c} - \vec{a})$

2.在以下命题中，正确命题的个数为（　　）

①若$\vec{a},\vec{b}$共线，则$\vec{a}$与$\vec{b}$所在直线平行；

②若$\vec{a},\vec{b}$所在直线是异面直线，则$\vec{a}$与$\vec{b}$一定不共面；

③若$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$三向量两两共面，则$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$三向量共面；

④若$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$三向量共面，则由$\vec{a},\vec{b}$所在直线所确定的平面与由$\vec{b},\vec{c}$所在直线确定的平面是同一个平面

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

3，（**广东省高明一中 2009 届高三上学期第四次月考**）若 a、b、c 为任意向量，m∈R，下列等式不一定成立的是（　　）

A. (a+ b) +c=a+ (b+ c)　B. (a+ b) ·c=a·c+ b·c　C. m(a+ b)=ma+ mb

D. (a·b)c=a(b·c)

4，（**陕西省西安铁一中 2009 届高三 12 月月考**）　与向量（-3，-4，5）共线的单位向量是（　　）

（A）（$\frac{3\sqrt{2}}{10},\frac{2\sqrt{2}}{5},-\frac{\sqrt{2}}{2}$）和（$-\frac{3\sqrt{2}}{10},-\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{\sqrt{2}}{2}$）；　（B）（$\frac{3\sqrt{2}}{10},\frac{2\sqrt{2}}{5},-\frac{\sqrt{2}}{2}$）；

（C）（$\frac{3\sqrt{2}}{10},\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{\sqrt{2}}{2}$）和（$-\frac{3\sqrt{2}}{10},-\frac{2\sqrt{2}}{5},-\frac{\sqrt{2}}{2}$）；　（D）（$-\frac{3\sqrt{2}}{10},-\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{\sqrt{2}}{2}$）；

5，在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，化简$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{DD_1}-\overrightarrow{BC})$的结果为

______________；

6，若空间三点 A（1，5，-2），B（2，4，1），C（p,3,q+2）共线，则 p=______,q=______。

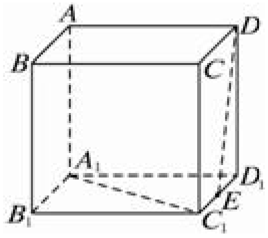
7，（**湖南省衡阳市八中 2009 届高三第三次月考试题**）已知$\overrightarrow{F_1}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$，$\overrightarrow{F_2}=-2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$，$\overrightarrow{F_3}=3\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$，若$\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$共同作用于一物体上，使物体从点 M（1，-2，1）移动到 N（3，1，2），则合力所作的功是______________ .

8，（**广东省北江中学 2009 届高三上学期 12 月月考**）在正三棱柱 ABC—A1B1C1 中，若 AB=$\sqrt{2}$BB1，则 AB1 与 C1B 所成角的大小为（　　）

A.60°　B.90°　C.105°　D.75°

9，设向量$\vec{a}=(3,5,-4),\vec{b}=(2,1,8)$，计算$3\vec{a}-2\vec{b},\vec{a}\cdot\vec{b}$, 并确定$\lambda,\mu$的关系，使$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$与$z$轴垂直

10，如图，E 是正方体 ABCD—A1B1C1D1 的棱 C1D1 的中点，试求向量$\overline{AC_1}$与$\overline{DE}$所成角的余弦值.



巩固题：

1，在△ABC 中，AB=AC=5，BC=6，PA⊥平面 ABC，PA=8，则 P 到 BC 的距离是…（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B.4 $\sqrt{5}$　　C.3 $\sqrt{5}$　　D.2 $\sqrt{5}$

2，在平面直角坐标系中，$A(-2,3), B(3,-2)$,沿 x 轴把平面直角坐标系折成 120°的二面角后则线段 AB 的长度为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{11}$　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$4\sqrt{2}$

3，若向量 a=(1,λ,2),b=(2,-1,2),a、b 夹角的余弦值为 8/9，则 λ 等于（　　）

A.2　　B.-2　　C.-2 或 $\frac{2}{55}$　　D.2 或 $-\frac{2}{55}$

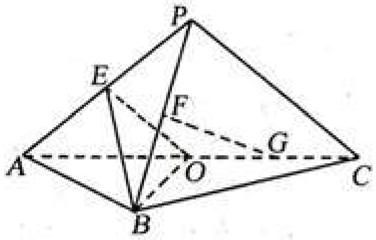
4,(**湖南省衡阳市八中 2009 届高三第三次月考试题**)已知 $\vec{a},\vec{b}$ 均为单位向量,它们的夹角为 60°,那么 $\left|\vec{a}+3\vec{b}\right|$ 等于（　　）

A．$\sqrt{7}$　　B．$\sqrt{10}$　　C．$\sqrt{13}$　　D．4

5，设 a=(x,4,3),b=(3,2,z),且 a∥b,则 xz 等于（　　）

A.-4　　B.9　　C.-9　　D. $\frac{64}{9}$

6,如图,平面 PAC⊥平面 ABC，ΔABC 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形，E,F,O 分别为 PA，PB，AC 的中点，$AC=16$，$PA=PC=10$．设 G 是 OC 的中点，证明：$FG//$ 平面 BOE；



7，**(山西大学附中 2008 届二月月考)**正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 所有棱长都是 2，D 是棱 AC 的中点，E 是棱 CC_1 的中点，AE 交 A_1D 于点 H.

（1）求证：$AE\perp$ 平面 A_1BD；

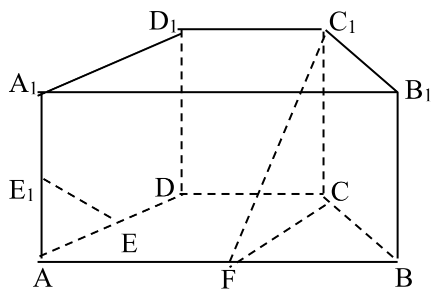
（2）求二面角 $D-BA_1-A$ 的大小（用反三角函数表示）；

（3）求点 B_1 到平面 A_1BD 的距离.

8，（09 山东理） 如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 ABCD 为等腰梯形，AB//CD，AB=4, BC=CD=2, $AA_1=2$, E、E_1 分别是棱 AD、AA_1 的中点.

（1） 设 F 是棱 AB 的中点,证明：直线 EE_1//平面 FCC_1；

（2） 证明:平面 $D_1AC\perp$ 平面 BB_1C_1C.



提高题：

1，（09 山东理）设 P 是△ABC 所在平面内的一点，$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$，则（　　）

A. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$　B. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$　C. $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\vec{0}$　D. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

2，（09 山东理）已知 α，β 表示两个不同的平面，m 为平面 α 内的一条直线，则“$\alpha\perp\beta$”是“$m\perp\beta$”的(　　)

A.充分不必要条件　B.必要不充分条件

C.充要条件　D.既不充分也不必要条件

3，（2010 文科）直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 $\angle BAC=90^{\circ}$，$AB=AC=AA_1$,则异面直线 BA_1 与 AC_1 所成的角等于（　　）

A，30°　　B，45°　　C，60°　　D，90°

4，（2010 文科 9)正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，BB_1 与平面 ACD_1 所成的角的余弦值为（　）

A，$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　B，$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C，$\dfrac{2}{3}$　　D，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

5，（2011 全国理）已知 a 与 b 均为单位向量，其夹角为θ，有下列四个命题

$P_1:|a+b|>1 \Leftrightarrow \theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$　　$P_2:|a+b|>1 \Leftrightarrow \theta\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right]$

$P_3:|a-b|>1 \Leftrightarrow \theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$　　$P_4:|a-b|>1 \Leftrightarrow \theta\in\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$

其中的真命题是（　）

A．P_1,P_4　　B．P_1,P_3　　C．P_2,P_3　　D．P_2,P_4

6，（2011 浙江理）下列命题中错误的是（　）

A．如果平面$\alpha\perp$平面β，那么平面α内一定存在直线平行于平面β

B. 如果平面 α 不垂直于平面β，那么平面α内一定不存在直线垂直于平面β

C．如果平面$\alpha\perp$平面γ，平面$\beta\perp$平面γ，$\alpha\cap\beta$=l，那么$l\perp$平面γ

D．如果平面$\alpha\perp$平面β，那么平面α内所有直线都垂直于平面β

7，（2011 全国文）若直线l不平行于平面a，且$l\notin a$，则（　）

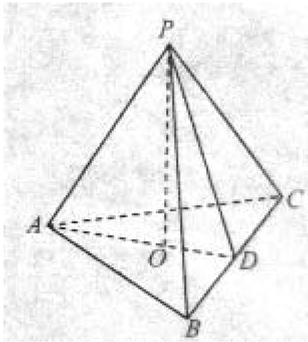
A．a内的所有直线与异面　　B．a内不存在与l平行的直线

C．a内存在唯一的直线与l平行　　D．a内的直线与l都相交

8，（2011 全国文）（本题满分 14 分）如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AB=AC$，D为BC的中点，$PO\perp$平面ABC，垂足O落在线段AD上.

（I）证明：$AP\perp BC$；

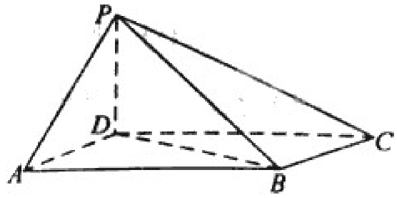
（II）已知$BC=8$，$PO=4$，$AO=3$，$OD=2$．求二面角$B-AP-C$的大小.



9，（2011 全国理）(本小题满分 12 分)如图，四棱锥 P—ABCD 中，底面 ABCD 为平行四边形，∠DAB=60°,AB=2AD,PD⊥底面 ABCD.

(Ⅰ)证明：PA⊥BD；

(Ⅱ)若 PD=AD，求二面角 A-PB-C 的余弦值。

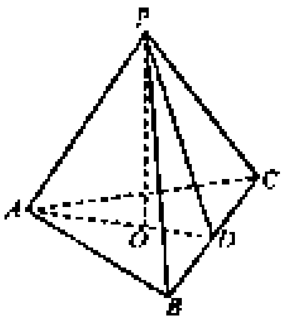


10，20．（本题满分 15 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=AC$，D 为 BC 的中点，PO⊥平面 ABC，垂足 O 落在线段 AD 上，已知 BC=8，PO=4，AO=3，OD=2

（Ⅰ）证明：AP⊥BC；

（Ⅱ）在线段 AP 上是否存在点 M，使得二面角 A-MC-B 为直二面角？若存在，求出 AM 的长；若不存在，请说明理由。



(第 20 题)